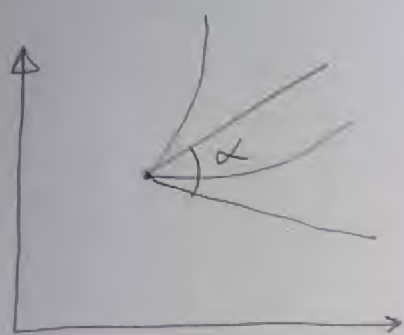


Lec 18

Conformal mapping

A map $f(z)$ on a domain D is said to be conformal on D if it preserves the angle "both magnitude and orientation"



$$w = f(z) = u + iv$$

* $f(z)$ is conformal on $D \iff f(z)$ is analytic on D and $f'(z) \neq 0$ on D

الهدف من هذه الدراسة هو دراسة شكل المناطق في مستوى (x, y) عند نقلها إلى دالة $f(z)$ analytic وفي بداية الأمر

يكون معلوم أن الدالة (analytic) تحافظ على مقدار الزوايا واتجاهها عند النقاط التي بها $f'(z) \neq 0$.

في الهدف من نمارس التفكير في تطبيق هندسي من خلال معلومات هذا الجزء تجعلنا نغطي معالم صورة أو منطقة

Ex Find the image of the region between the circle $|z|=1$ & $|z-\frac{2}{5}|=\frac{2}{5}$ by the map

$$w = \frac{2z-1}{z-2}$$

الحل

$$w = u + iv ; z = x + iy$$

$$|w|^2 = w\bar{w} = \frac{2z-1}{z-2} \times \frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}-2}$$

$$= \frac{4z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) + 1}{z\bar{z} - 2(z+\bar{z}) + 4} \rightarrow *$$

$$|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z\bar{z}=1$$

$$|w|^2 = \frac{5 - 2(z+\bar{z})}{5 - 2(z+\bar{z})} = 1$$

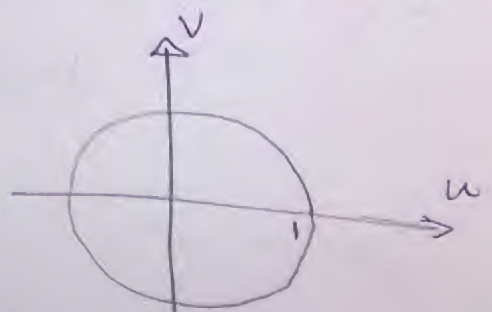
$$|w|=1$$

دائرة في uv -Plane مركزها $(0,0)$

ونعوضها 1

$$\left|z - \frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} \Rightarrow \left|z - \frac{2}{5}\right|^2 = \frac{4}{25}$$

$$\left(z - \frac{2}{5}\right)\left(\bar{z} - \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$$



$$z\bar{z} - \frac{2}{5}(z + \bar{z}) + \frac{4}{25} = \frac{4}{25}$$

$$z\bar{z} = \frac{+2}{5}(z + \bar{z})$$

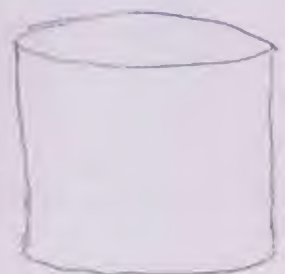
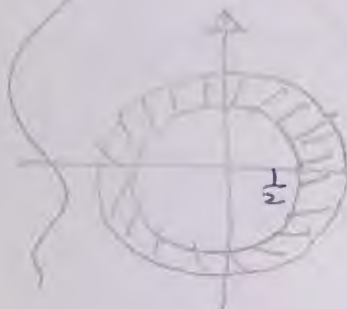
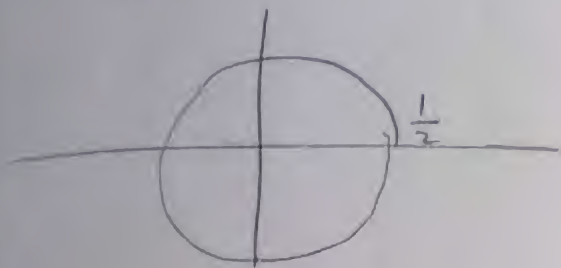
* بالتعويض في

$$|w|^2 = \frac{4z\bar{z} - 5z\bar{z} + 1}{z\bar{z} - 5z\bar{z} + 4} = \frac{1 - z\bar{z}}{4(1 - z\bar{z})}$$

$$|w|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |w| = \frac{1}{2}$$

دائرة في (uv-plane) مركزها (0,0) ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

the map $w = \frac{2z-1}{z-2}$ maps the region to



الهندسية في هذا الجزء هو

من أهم

الجهد الإلكتروني بين إسطوانتين مركزهم نقطة الأصل

إذا تم إزالة الإسطوانة الداخلية وتغيير مركزها لا يغير

التعويض في شكل قوانين الصورة

إلى (Conformal mapping) لتحويل المنطقة إلى دائرة

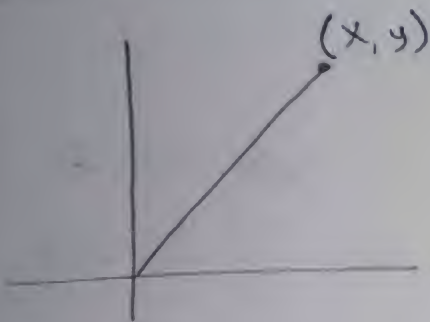
مركزهم فقط الأهل ثم فرجع لـ (map) كما في المثال السابق.

Standard Forms

I Linear map

$$w = az + b$$

Some Notes



$$w = az$$

$$|w| = |a||z|$$

$$\arg w = \arg(a) + \arg(z)$$



II Linear map

$$w = az + b$$

الدالة

① تزيد الأطوال بمقدار $|a|$.

② تزيد المساحات بمقدار $|a|^2$.

③ تدور الرسمة $\arg a$.

④ الرسمة تنقل إلى النقطة $b = b_1 + ib_2$.

Ex use the map $w = (1+i)z + (4+5i)$ to find the image of the following ~~new~~ regions:

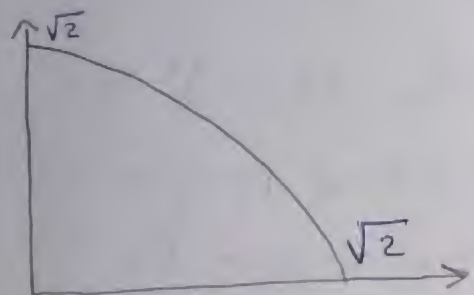
- ① $|z| \leq 1$ and $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
- ② the triangle with vertices $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$
- ③ the rectangle $-1 \leq x \leq 1 ; -2 \leq y \leq 2$

5.51

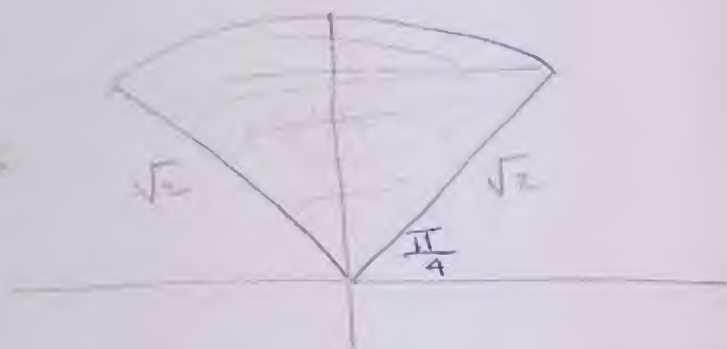
1

$$a = 1 + i$$

$$|a| = \sqrt{2} ; \arg a = \frac{\pi}{4}$$

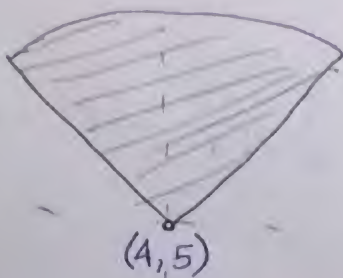


\Rightarrow



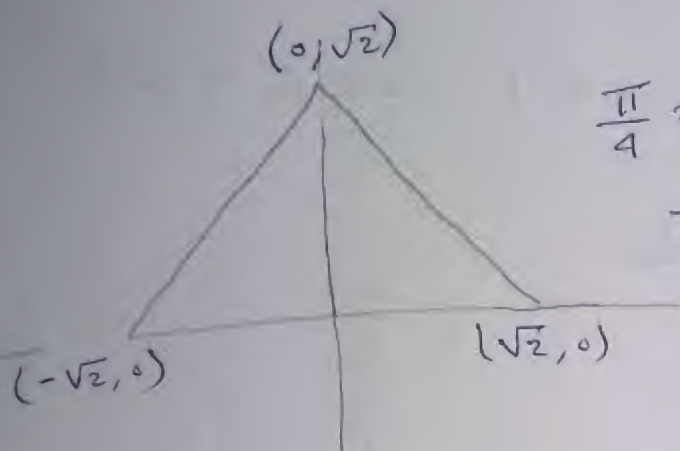
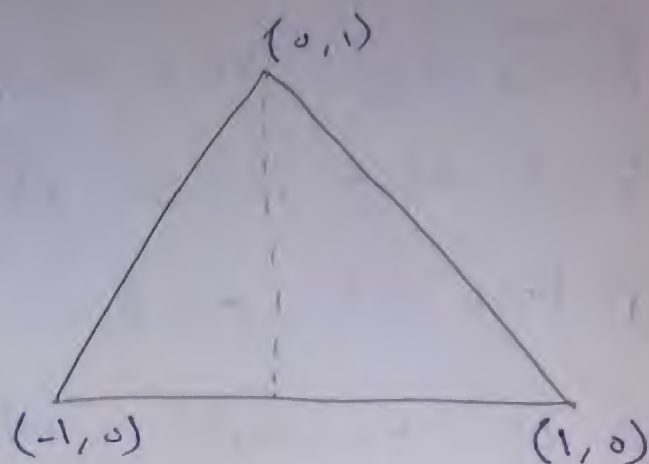
$b = 4 + 5i \rightarrow$ the map conform the region to

u

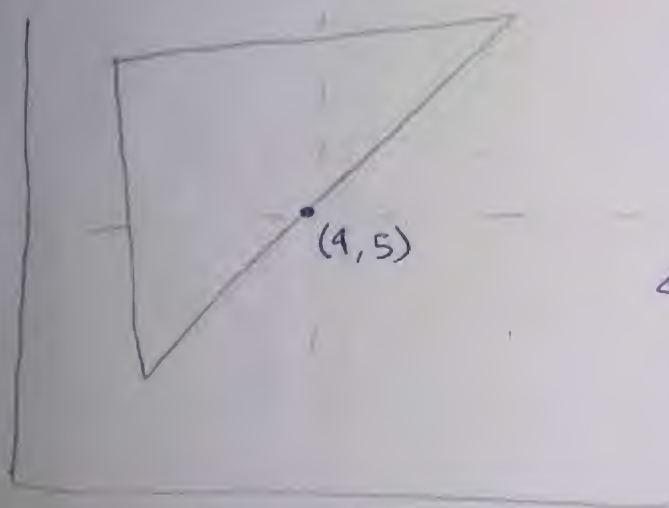
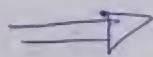


② نكتب الأطوال $\sqrt{2}$ والمساحات

$$|u|^2 = z \quad \text{من } M^2$$



نُدْر الرتبة $\frac{\pi}{4}$



ننقل الرتبة إلى (4, 5)

⇐ the map region conform the region to

2] the map $w = z^n$

$$z = r e^{i\theta} = x + iy$$

$$w = \rho e^{i\phi} = u + iv$$

$$w = z^n \Rightarrow |w| = |z|^n$$

$$\therefore \boxed{\rho = r^n}$$

$$\arg w = n \arg z$$

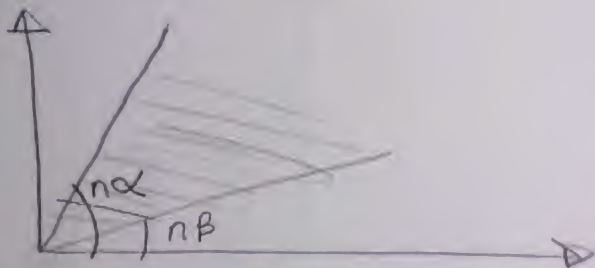
$$\boxed{\phi = n\theta}$$

Ⓐ الدائرة التي نصف قطرها "a" تنقل إلى دائرة نصف قطرها "a^n"

$$\beta \leq \arg z \leq \alpha \Leftrightarrow \beta \leq \theta \leq \alpha \quad \text{Ⓑ}$$

$$n\beta \leq n\theta \leq n\alpha$$

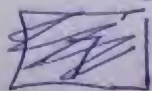
$$n\beta \leq \phi \leq n\alpha$$



ع إذا كان n عدد صحيح موجب فإنه الزوايا بين الخطوط

تضرب في n .

ع تزويد الزوايا بين الخطوط بمقدار n .



Ex Find the image of the region $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$ and $|z|=2$ under the map

$$w = z^3$$

Sol

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}, \quad |z|=2$$

Δy

$$w = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho = r^3, \quad \phi = 3\theta$$



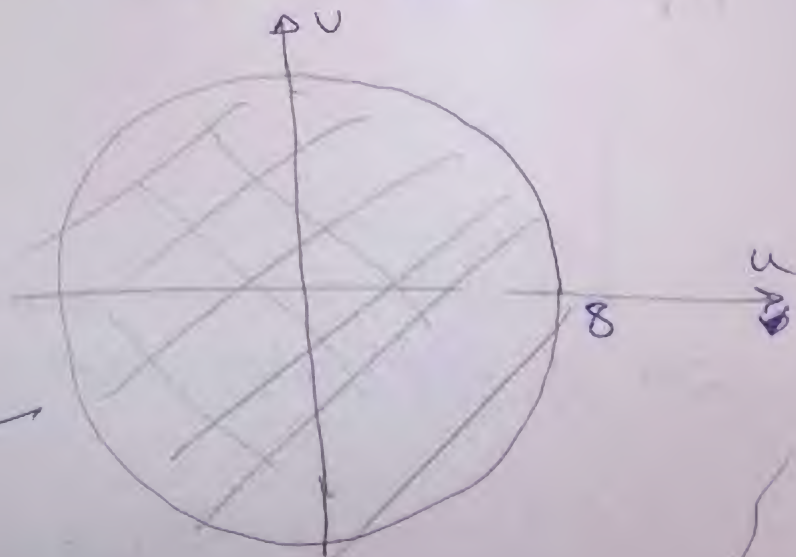
$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\pi \leq 3\theta \leq \pi$$

$$-\pi \leq \phi \leq \pi$$

$$|z|=2 \Rightarrow r=2 \Rightarrow \rho = 2^3 = 8 \quad \boxed{\rho=8} \rightarrow (2)$$

$$-\pi \leq \arg w \leq \pi$$

$$|w| = 8$$



الدائرة بأكملها

3] the map $w = \frac{1}{z}$

Ex] show that the map $w = \frac{1}{z}$ transform equation of circle and Lines.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \longrightarrow (1)$$

to $D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0$

where $w = u + iv$.

Sol

$$w = \frac{1}{z} ; \bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

$$w\bar{w} = u^2 + v^2$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

بالعربي في 1

$$Az\bar{z} + \frac{B}{2}(z + \bar{z}) + \frac{C}{2i}(z - \bar{z}) + D = 0$$

$$z = \frac{1}{w}, \quad \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$A\left(\frac{1}{w\bar{w}}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right)$$

$$+ D = 0$$

بالفرض $w\bar{w}$

$$A + \frac{B}{2}(w + \bar{w}) + \frac{C}{2i}(\bar{w} - w) + D w \bar{w} = 0$$

$$w\bar{w} = u^2 + v^2 \quad ; \quad u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$$

$$; \quad v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$$

$$\therefore A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0 \quad //$$

Ex: Find the image of the following curves
by $w = \frac{1}{z}$

① the Line $2x + 4y + 1 = 0$

② the Circle $|z - 1| = 2$

A	B	C	D
D	B	-C	A

Sol

① $A = 0$; $B = 2$; $C = 4$; $D = 1$

$$(u^2 + v^2) + 2u - 4v = 0$$

② $|(x-1) + iy| = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + y^2) - 2x - 3 = 0$$

$$A=1 \quad B=-2 \quad C=0 \quad D=-3$$

$$\Rightarrow -3(u^2 + v^2) - 2u + 1 = 0$$

[4] the map $w = z + \frac{1}{z}$

$$z = r e^{i\theta} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$w = r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$= r \cos \theta + r i \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{i}{r} \sin \theta$$

$$w = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

المطلوب استنتاج علاقة بين u, v, r توجد منها شكل

صورة الدوائر و صورة بين u, v, θ توجد منها شكل

صورة الزوايا بين الخطوط.

$$\frac{u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

قطع ناقص

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 =$$

$$r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} - r^2 + 2 - \frac{1}{r^2} = 4$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = 4$$

$$\frac{u^2}{4\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{4\sin^2 \theta} = 1$$

قطع زائد

تنقل الخواطر بقطع ناقص وتنقل الزوايا بقطع زائد.

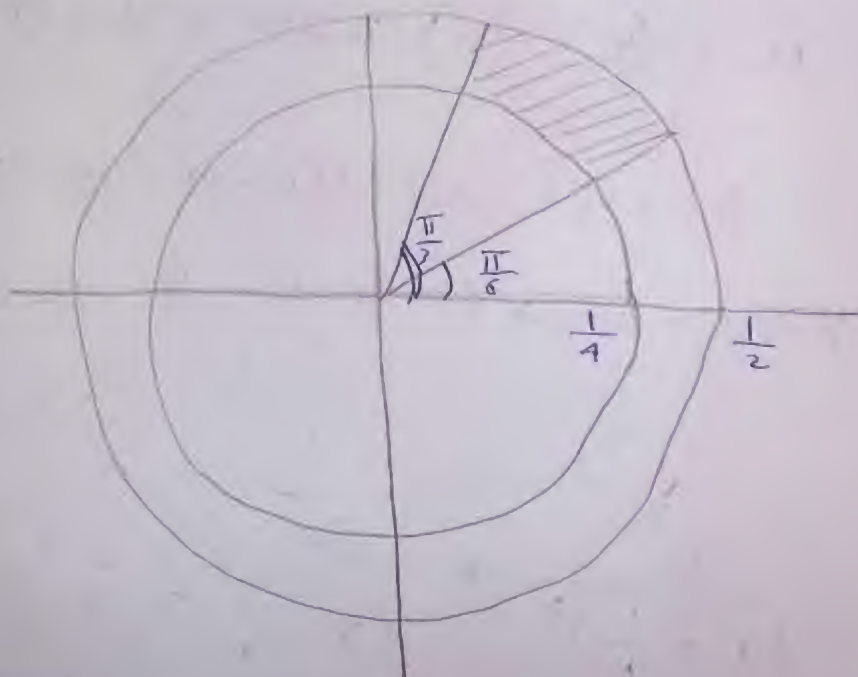
[EX] Conform the region $\frac{1}{4} \leq |z| \leq \frac{1}{2}$

, $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ by the map $w = z + \frac{1}{z}$

$$\frac{1}{4} \leq |z| \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

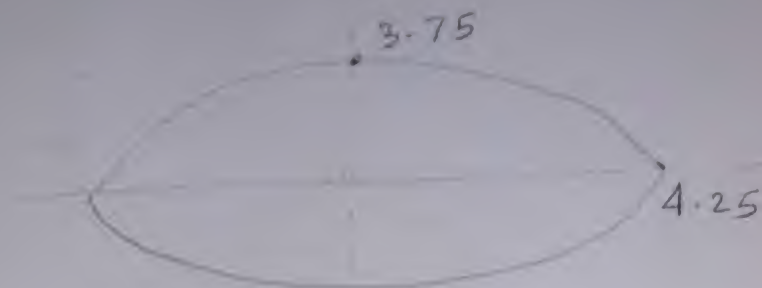
$$r = \frac{1}{4}$$



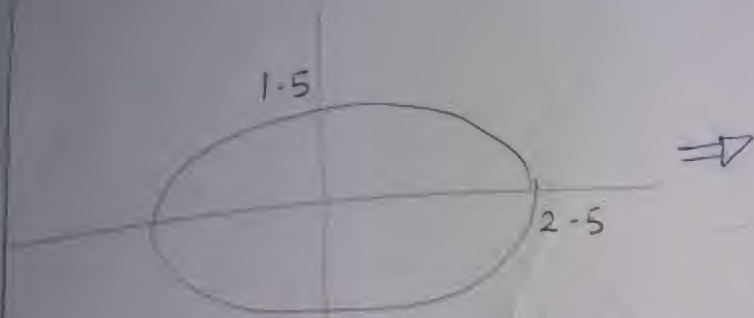
$$\frac{u^2}{(4.25)^2} + \frac{v^2}{(3.75)^2} = 1$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u^2}{(2.5)^2} + \frac{v^2}{(1.5)^2} = 1$$



$\frac{1}{4} \leq r \leq \frac{1}{2}$ its image



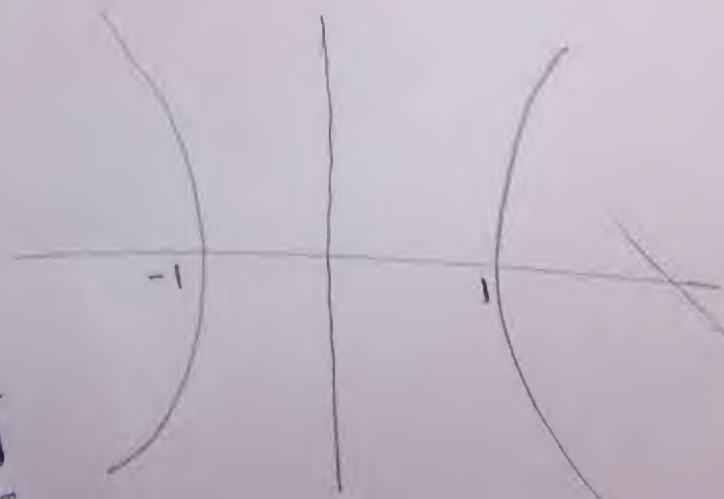
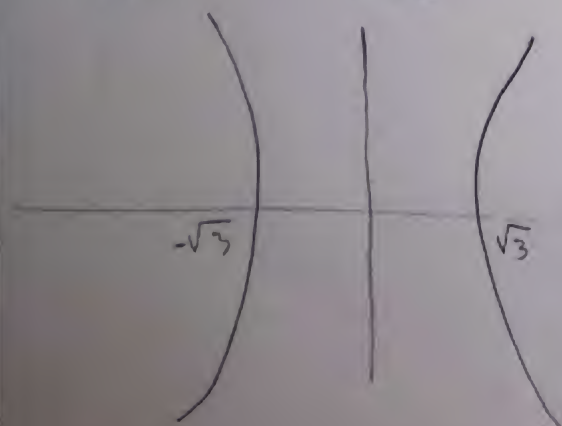
$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{3}$$

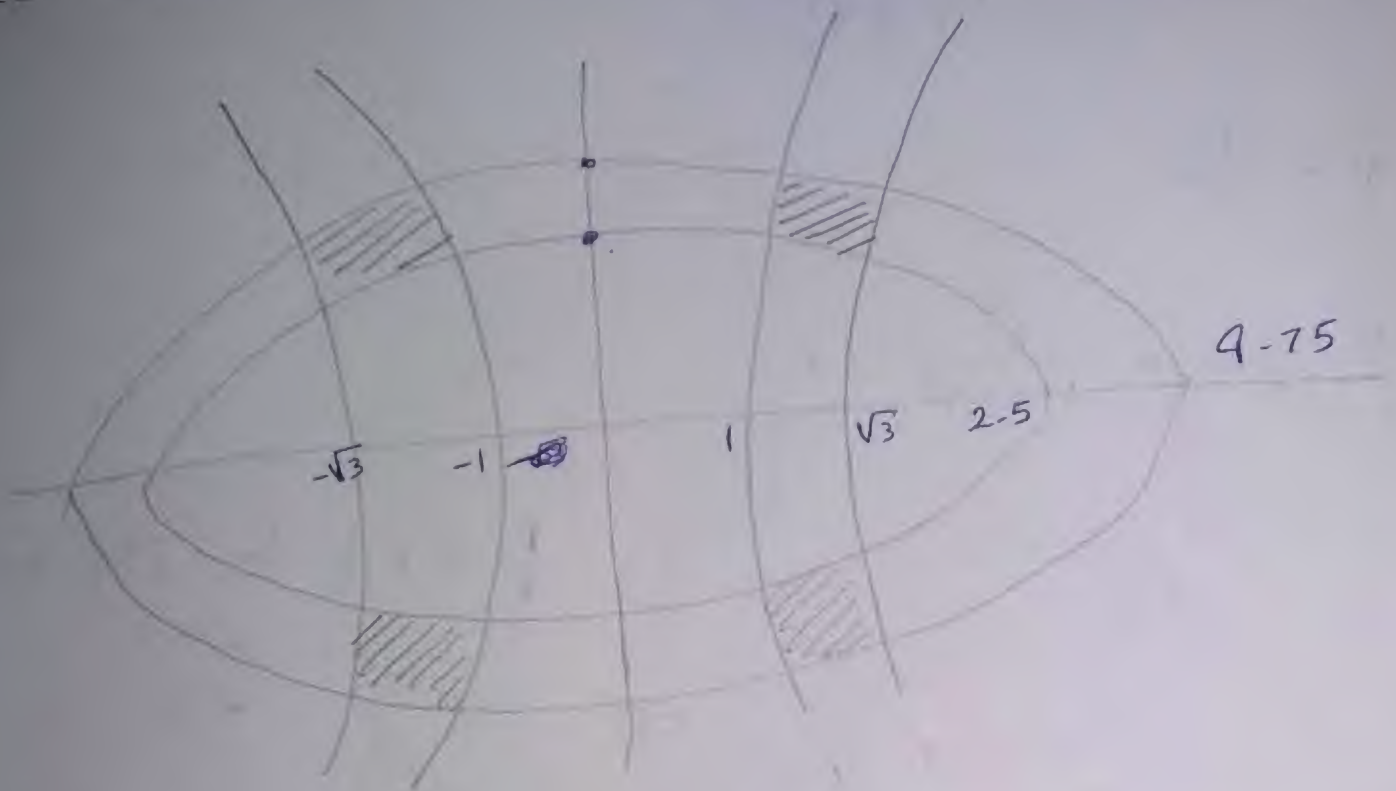
$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{u^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{v^2}{4(\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$\frac{u^2}{4(\frac{1}{2})^2} - \frac{v^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$



the map $w = z + \frac{1}{z}$ Conform the region to:-



[14] Lec 18